※ ホームページ等で公表します。（様式１）
立教ＳＦＲ－院生－報告

立教大学学術推進特別重点資金（立教ＳＦＲ）
大学院学生研究
２０１８年度研究成果報告書

研究科名	立教大学大学院	理学研究科		数学専攻
研究代表者 (2019年3月現在のものを記入)	在籍課程・学年・学生番号 □博士前期課程　年 ☑博士後期課程１年 18RC001E	氏　名 石原侑樹　印		
指導教員	所属・職名 理学部・教授	氏　名 横山和弘　印		
自然・人文・社会の別	自然 ・ 人文 ・ 社会	**個人・共同の別**	個人 ・ 共同　名	
研究課題	局所化操作の新しい理論の構築と効率的な実装			
研究組織 （研究代表者・共同研究者） ※2019年3月現在のものを記入	在籍研究科・専攻・課程・学年 理学研究科・数学専攻・博士課程後期課程・１年	氏　名 石原侑樹		
研究期間	２０１８　年度			
研究経費 (1円単位)	（支出金額）　300,000円　／（採択金額）　300,000円			

研究の概要（200～300字で記入、図･グラフ等は使用しないこと。）

計算機代数（Computer Algebra）とは、計算機上で、代数的計算を正確に行うことを目標にする分野である。その研究対象は主に、整数環、有理数体、有限体およびそれらを係数とする多項式環の種々の計算である。例えば、その計算は多項式の因数分解、連立方程式の求解、イデアルの演算など多岐に渡る。誤差を許す数値計算とは大きく異なり、計算機代数では、誤差のない完全に正しい結果を要求する。これにより代数的な構造を正確に扱うことができる。本研究ではその中でも局所化操作という手法に注目した。局所化操作は可換環論や代数幾何学において重要な道具の１つであり、その効率的な計算が実現できれば純粋数学や応用数学への様々な貢献が期待される。本研究では「二重イデアル商」という新しい概念を提案し、それらの周辺の理論の構築および効果的な局所化操作のアルゴリズムを考案した。

キーワード（研究内容をよく表しているものを３項目以内で記入。）

〔　計算機代数　〕〔　グレブナー基底　〕〔　局所化操作　〕

研究成果の概要（図･グラフ等は使用しないこと。）

研究背景

計算機代数（Computer Algebra）とは、計算機上で、代数的な演算を正確に行うことを目標にする分野である。その中で特に多変数多項式環での計算理論においては、「グレブナー基底」と呼ばれる概念が基本的なツールとなっている。グレブナー基底は１９６５年ごろにオーストリアの Bruno Buchberger によって発見された多項式の特殊な集合で、多くの数学者・計算科学者によって研究されてきている。近年では、AI（人工知能）や量子コンピュータと組み合わせて活用する手法も研究されてきている。また、最前線の研究者以外にもアマチュアの数学愛好家の間でも話題となっており有志によるセミナーや勉強会なども開かれているようである。

研究目的

本研究ではこのグレブナー基底を使って、イデアルの局所化操作の新しい理論の構築とアルゴリズムの実装に取り組んだ。グレブナー基底を使うと、イデアルの共通部分、イデアル商、飽和イデアルなどのイデアル操作を計算することができる。さらに、イデアル操作を部品として、「イデアルの局所化」を計算することができる。局所化はイデアルから特定の情報だけを抽出する操作であり、それ自体数学的にとても重要な操作であるが、連立方程式の求解や他の操作の前処理にも用いることができる。また、効率的な局所化のアルゴリズムを考えることは部品であるグレブナー基底やイデアル操作を見直すことにもなり、それらの改良にも繋がる。

問題点

一般にグレブナー基底の最悪計算量は二重指数的と言われている。これはグレブナー基底を計算する際に多くの時間がかかってしまう可能性を意味している。これは実用の数値計算などの計算量と比較してもかなり大きい。そのため、効率的な局所化操作のためには、冗長な計算を排除したアルゴリズムを構築する必要がある。局所化計算の既存の手法の１つとしては、準素イデアル分解を用いた手法があるが、準素イデアル分解は局所化に必要のない準素成分まで計算してしまうため、直接的な手法とは言えない。直接的でより効率的な局所化操作のアルゴリズムが求められている。

本研究の特色、着眼点、独創的な点

上記の問題点を踏まえ、本研究は次のような解決策を考えた。

- 完全な準素イデアル分解をせず、局所化操作を計算する。
- 計算コストの低い数値計算などを利用して、その出力が正しいかどうかの判定に数式処理を用いる。

研究成果

次のような成果が得られた。

- 「二重イデアル商」という概念を用いて、特定の準素成分の生成法および判定法を考案した。
- 考案した特定の準素成分だけを求めるアルゴリズムについての論文を投稿したところ、査読付論文として受理された。
- 数値計算やモジュラー計算と組み合わせ、より効率的な局所化のアルゴリズムを提案した。
- 上記の成果を国際会議や研究集会などで発表した。

以下に、その詳細について記述する。

まず、準素イデアル分解とはイデアルを準素イデアルと呼ばれる特殊なイデアルの共通部分で表現することである。準素イデアル分解は１変数の因数分解の一般化になっており、そのアルゴリズムも複雑なものになっている。以下では準素イデアル分解は冗長性のないものとする。準素イデアル分解に登場する準素イデアルのことを準素成分と呼び、その根基イデアルのことを素因子と呼ぶ。準素成分と素因子は定義では準素イデアル分解に依存しているため、準素イデアル分解をしないと生成や判定ができないと思われるかもしれないが、二重イデアル商やその変種を利用すると、完全な準素イデアル分解をせずに計算することができる。二重イデアル商は、名前の通り２回イデアル商を取ったイデアルである。

先行研究としては、過去に特殊な場合についての研究はあったが、詳細に分析し局所化操作との関連を調べ査読付論文として認められたのはおそらく本研究が初めてだと思われる。イデアルＩとＪに対し、イデアル商(I:J)はイデアルの割り算のような概念であるが、必ずしも割り算のように機能しない。例えば、普通の割り算ならば5/(5/3)=3 のように２回割り算をすると元に戻るが、二重イデアル商では必ずしも(I:(I:J))=J が成り立たない。しかし、イデアルＪがＩの素因子など特殊な場合には、(I:(I:J))=J が成立する。先行研究では、その性質を利用することで準素イデアル分解をせずに与えられた素イデアルが素因子かどうかの判定をしていた。本研究ではそこから着想を得て、もっと一般の場合や二重イデアル商の一部を変えた「変種」について、詳細に分析をし、その結果は査読付論文として受理された。二重イデアル商の変種としては、第一飽和商イデアル、第二飽和商イデアル、第三飽和商イデアルの３種類がある。それぞれに次のような特徴がある。

研究成果の概要　つづき

第一飽和商イデアル(I:(I:J)∞)…二重イデアル商の外側のイデアル商を飽和イデアルに変えた
第二飽和商イデアル(I:(I:J∞)∞)…二重イデアル商の外側と内側ともに飽和イデアルに変えた
第三飽和商イデアル(I:(I:J∞))…二重イデアル商の内側のイデアル商を飽和イデアルに変えた

例えば、第一飽和商イデアル（I:(I:J)∞）は局所化の判定や準素成分の判定に利用することができる。第二飽和商イデアル(I:(I:J∞)∞)は孤立準素成分の生成や孤立・埋没の判定に用いることができる。また、第三飽和商イデアル(I:(I:J∞))は素因子の判定に用いることができる。一般に、イデアル商より飽和イデアルの方が計算効率が良いため、二重イデアル商よりその変種の方が計算しやすいことが多い。これらの生成法と判定法を組み合わせることで特定の準素成分だけを求める Local Primary Algorithm を考案した。

Local Primary Algorithm では、イデアルＩと素イデアルＰを入力として、まずＰが素因子かどうか第三飽和商イデアルを用いて判定する。次に、素因子だった場合には、Ｐが孤立か埋没かを第二飽和商イデアルを用いて判定する。孤立だった場合は、先ほど計算した第二飽和商イデアルを使って孤立準素成分を求める。埋没だった場合は、準素成分の候補を計算しそれが準素成分かどうかを第一飽和商イデアルを用いて判定する。これにより、準素イデアル分解をせずに特定の準素成分のみを計算することができる。

この結果は、様式３(1)“Effective Localization Using Double Ideal Quotient and Its Implementation”というタイトルの査読付論文として国際会議で受理され、フランスで行われた伝統ある国際会議 International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing（様式３(5)）で発表も行なった。また、福岡で開催された日本数式処理学会で「二重イデアル商を用いた Effective Localization」というタイトルで発表したところ、「日本数式処理学会第 27 回大会 2018 年度若手研究者賞」を受賞した（様式３(3)）。

Local Primary Algorithm ではこれらの計算は exact に行うが、途中の計算が不正確な場合でも機能する。例えば、数値計算によって、素因子の候補、準素成分の候補を計算できれば、それが本当に正しいかどうかは二重イデアル商の判定法によって保証ができる。一般に数値計算は誤差を許容する分、数式処理より計算効率が良いため、より効率的な局所化操作が期待される。本研究では、既存の数値計算のアルゴリズム Numerical Primary Decomposition と Local Primary Algorithm と組み合わせ、具体的な例について計算した。そして、その結果について東京理科大学で開催された日本数式処理学会 2018 年度基礎理論分科会＆システム分科会合同研究会において、タイトル「数値計算を用いたイデアルの効果的な局所化操作」として発表した(様式３(4))。

また、二重イデアル商を用いて新しい準素イデアル分解のアルゴリズムを考案した。準素イデアル分解の代表的なアルゴリズムの１つとしては下山-横山のアルゴリズムがある。下山-横山のアルゴリズムはイデアルをその孤立素因子ごとに弱く分解する手法で、効率的な準素イデアル分解の手法の１つとして知られている。その弱い分解擬準素イデアル分解にはセパレータ系と呼ばれる特殊な多項式の有限集合の組が使われている。そのため、セパレータ系の位数が膨大な場合や、セパレータ系を構成する多項式の表現が複雑な場合、計算時間が甚大になる可能性がある。そこで、本研究ではセパレータ系の代わりに二重イデアル商を用いた新しい手法を提案した。イデアルＩと孤立素因子Ｐに対し、第二飽和商イデアル(I:(I:P∞)∞)は、擬準素イデアル分解におけるＰ擬準素成分と一致する。また、二重イデアル商や極大独立集合を用いると孤立準素成分を計算することができる。さらに、splitting tool と呼ばれる分解手法を用いると、remaining component まで計算することができる。これにより、二重イデアル商やその変種を用いた、セパレータ系を使わない擬準素イデアル分解のアルゴリズムを構築することができる。これはセパレータ系の計算が困難な場合などに効果が期待される。また、根基の完全な素イデアル分解を必要としないため、部分的に擬準素イデアル分解もすることができ、より効果的な局所化操作のアルゴリズムへの利用が考えられる。これらの結果は、京都大学に行われた『RIMS 共同研究(公開型) Computer Algebra－Theory and its Applications』において、タイトル“A New Algorithm for Primary Decomposition Using Double Ideal Quotient”として発表している(様式３(6))。

数値計算の類似として、有限体上での計算との組み合わせについても取り組んだ。有理数上の計算を有限体上で行う場合、数値計算と同じように誤差が生まれる。しかし、有限体の場合には中国人の剰余定理などが使えるため、有理数の計算に復元しやすい場合がある。そこで、準素イデアル分解を有限体上で計算し準素成分の候補を出した後、本当にそれが正しい準素成分かどうかを二重イデアル商で判定するアルゴリズムについて提案した。この結果は、金沢で行われた Risa/Asir Conference 2019 において、タイトル「Modular 計算を利用した効果的な局所化操作」として発表をしている(様式３(7))。

研究発表（研究によって得られた研究成果を発表した①～④について、該当するものを記入してください。該当するものが多い場合は主要なものを抜粋してください。なお、成果発表を確認できる資料を合わせて提出してください。）

①雑誌論文（著者名、論文標題、雑誌名、巻号、発行年、ページ）
②図書（著者名、出版社、書名、発行年、総ページ数）
③シンポジウム・公開講演会等の開催（会名、開催日、開催場所）
④その他（学会発表、研究報告書の印刷等）

① 雑誌論文

（査読あり）

（1）Ishihara,Y., Yokoyama, K.:Effective Localization Using Double Ideal Quotient and Its Implementation. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cham. vol 11077, (2018). 272-287

（査読なし）

（2）石原侑樹、″二重イデアル商を用いた Effective Localization″「数式処理」、日本数式処理学会、Vol.25、No.2、(2019)、71-74

② 図書

該当なし。

③ シンポジウム

該当なし。

④ その他

学会発表

（3）石原侑樹、「二重イデアル商を用いた Effective Localization」、『日本数式処理学会 第 27 回大会』、福岡教育大学、2018 年 6 月

（4）石原侑樹、「数値計算を用いたイデアルの効果的な局所化操作」、『日本数式処理学会 2018 年度基礎理論分科会＆システム分科会合同研究会』、東京理科大学、2018 年 9 月

（5）Ishihara,Y., Yokoyama, K.:Effective Localization Using Double Ideal Quotient and Its Implementation, The 20th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing, Lille, Sep. 2018

（6）石原侑樹、“A New Algorithm for Primary Decomposition Using Double Ideal Quotient”、『RIMS 共同研究（公開型）Computer Algebra – Theory and its Applications』、京都大学、2018 年 12 月

（7）石原侑樹、「Modular 計算を利用した効果的な局所化操作」、『Risa/Asir Conference 2019』、金沢、2019 年 3 月

受賞

（8）日本数式処理学会第 27 回大会「2018 年度若手研究者賞」