B-1

※ホームページ等で公表します。（様式１）

立教ＳＦＲ－個人－報告

立教大学学術推進特別重点資金（立教ＳＦＲ）
個人研究
２０１５年度研究成果報告書

	所属部局・職	氏名
研究代表者	理学部・教授	杉山　健一　印
研究課題	ラマヌジャングラフの伊原ゼータ関数と Hasse-Weil ゼータ関数の比較	
研究期間	２０１５　年度	
研究経費（１円単位）	（支出金額）３１７，０７８円／（採択金額）４５０，０００円	

研究の概要（２００～３００字で記入、図・グラフは使用しないこと）

連結なラマヌジャングラフの伊原ゼータ関数は、有限体上定義された非特異射影代数曲線の Hasse-Weil 合同ゼータ関数と多くの性質を共有する。modular 曲線 $X_0(pM)$（ここで、p は素数であり、M は p と互いに素な自然数）は p で特異還元を持つ。その特異点の集合を Σ で表し、pM と互いに素な素数 l を固定する。このとき Σ を基底にする自由アーベル群 $\mathbb{Z}^{\Sigma}$ に Hecke 作用素 T_l が作用し、この作用の表現行列を隣接行列とするグラフは連結なラマヌジャングラフとなる。本研究ではこのラマヌジャングラフの伊原ゼータ関数と $X_0(pM)$ の l における還元の Hasse-Weil 合同ゼータ関数の関係を明らかにする。

キーワード（研究内容をよく表しているものを３項目以内で記入。）

〔　ラマヌジャングラフ　〕〔　ゼータ関数　〕〔　modular 曲線　〕

研究成果の概要（図･グラフ等は使用しないこと。）

リーマンゼータ関数

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1}$$

は整数論において重要な関数であり、素数分布について多くの情報をもつ。$\zeta(s)$ に関する最も大きな予想が、$\zeta(s)$ の非自明な零点は直線 $\Re e\, s = 1/2$ 上に分布するであろう、というリーマン予想である。この予想の背景を探るために、様々なモデルでリーマン予想の類似が提唱され、研究されてきた。それらの中でも、有限体上の非特異射影代数曲線について定義される Hasse-Weil 合同ゼータ関数と有限なグラフの伊原ゼータ関数は、多くの研究者の興味をひいてきた。この二つの関数の定義は良く似ていて、実際多くの性質を共有する。本研究では、グラフが modular 曲線の還元から得られる場合に、その伊原ゼータ関数と modular 曲線の還元の Hasse-Weil 合同ゼータ関数の関係を明らかにした。以下その概要を述べる。

まず、グラフの伊原ゼータ関数について基本事項を説明する。有限なグラフは１次元の有限単体複体として定義されるが、各辺には双方向に向きが定義されているとする。今後扱われるグラフは、すべて有限な連結グラフとする。グラフ G の伊原ゼータ関数は

(1) $$Z(G;t) = \prod_{[c]} (1-t^{l([c])})^{-1}$$

で定義される。ここで、$[c]$ は G の行き戻りなしの閉路の同値類を動き、$l([c])$ でその長さを表す。閉路 c と c' が同値であるとは、両者が回転により重なり合う時（つまり始点を無視して、図形として同じとき）と定める。一般にこれは無限積であるが、以下に説明するように、伊原により $Z(G;t)$ の有限表示が知られている。頂点 i,j を結ぶ辺の本数を A_{ij} として、隣接行列 A を $A=(A_{ij})_{ij}$ と定める。また頂点 i を端点とする辺の本数を $d(i)$ として、対角行列 Q を $Q=((d(i)-1)\delta_{ij})_{ij}$($\delta_{ij}$ は Kronecker の delta) と定めると、伊原の公式は

(2) $$Z(G;t) = \frac{(1-t^2)^{\chi(G)}}{\det[1-At+Qt^2]}$$

と述べられる（$\chi(G)$ は G のオイラー数）。いまある k が存在して、頂点 i によらず $d(i)=k$ とすると（このようなグラフは k 正則と呼ばれる）、k は A の重複度１の固有値となる。グラフ G がラマヌジャンとは、絶対値が k に等しくない A の固有値 λ は常に

$$|\lambda| \leq 2\sqrt{k-1}$$

を満たすことと定義する。とくに p を素数として $(p+1)$ 正則のラマヌジャングラフ G の伊原ゼータ関数 $Z(G;t)$ は有限体上の代数曲線に対して定義される Hasse-Weil 合同ゼータ関数と関係が深い。

X を有限体 $\mathbb{F}_q\,(q=p^f)$ 上定義された非特異射影代数曲線とすると、Hasse-Weil 合同ゼータ関数は

(3) $$W(X;t) = \prod_{x\in|X|} (1-t^{\deg(x)})^{-1}$$

研究成果の概要（つづき）

と定義される。ここで、$|X|$ は X の閉点から成る集合とし、閉点 x における剰余体 $k(x)$ の $\mathbb{F}_q$ 上の拡大次数を $\deg(x)$ で表した。この関数も無限積であるが、Weil と Grothendieck により有限表示を持つことが知られている。すなわち p と異なる素数 l をひとつ固定すると、X の Jacobi 多様体 $Jac(X)$ の l 進 Tate 加群 $T_l(Jac(X))$ に Frobenius 写像 F_q が作用するが、それを $\rho_l(F_q)$ で表す。このとき、

$$W(X;t)=\frac{\det(1-\rho_l(F_q)t)}{(1-t)(1-qt)} \tag{4}$$

が成り立つ。このようにグラフの伊原ゼータ関数と有限体上定義された代数曲線の Hasse-Weil 合同ゼータ関数は極めて似た表示をもつが、本研究の目標は両者の関係を明らかにすることである。以下、得られた結果を述べる。

素数 p と異なる自然数 M を固定し、$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上定義された超特異楕円曲線 E とその位数 M の巡回部分群 Γ の対 (E,Γ) の同型類の集合を $X_0(M)^{ss}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ で表す。pM を割り切らない素数 l をとると、$X_0(M)^{ss}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ を基底とする自由アーベル群 $\mathbb{Z}^{X_0(M)^{ss}_{\overline{\mathbb{F}}_p}}$ には Hecke 作用素 T_l が作用するが、この表現行列を隣接行列とするグラフを $G_l(M:\mathbb{F}_p)$ とすると、Deligne の結果から $G_l(M:\mathbb{F}_p)$ は連結なラマヌジャングラフとなることが分かる。以上の準備のもとに我々の主結果はつぎのように述べられる。

定理 1.

$$\frac{Z(G_l(M:\mathbb{F}_p);t)}{(1-t^2)^{\chi(G_l(M:\mathbb{F}_p))}}=\frac{W(X_0(M)_{\mathbb{F}_l};t)^2}{W(X_0(pM)_{\mathbb{F}_l};t)}.$$

ただし、$X_0(\cdot)_{\mathbb{F}_l}$ は l における還元を表す。

同様の結果が志村曲線の場合にも得られた。また志村曲線の結果より伊原ゼータ関数の相互律が得られた。

定理 2. $p,\ q(\neq l)$ は互いに異なる素数で

$$\mathrm{Tr}(T_l\,|\,\mathbb{Z}^{X_0(1)^{ss}_{\overline{\mathbb{F}}_p}})=\mathrm{Tr}(T_l\,|\,\mathbb{Z}^{X_0(1)^{ss}_{\overline{\mathbb{F}}_q}})=0$$

を満たすとする。このとき、

$$\frac{Z(G_l(q:\mathbb{F}_p);t)}{Z(G_l(1:\mathbb{F}_p);t)^2}=\frac{Z(G_l(p:\mathbb{F}_q);t)}{Z(G_l(1:\mathbb{F}_q);t)^2}$$

が成り立つ。

ここで定理２における仮定は、等式に現れる４つのグラフのいずれもがループ (= 長さ１の閉路) を持たないことを保証する。

※　この（様式２）に記入の、成果の公表を見合わせる必要がある場合は、その理由及び差し控え期間等を記入した調書（Ａ４縦型横書き１枚・自由様式）を添付すること。

研究発表（研究によって得られた研究経過・成果を発表した①～④について、該当するものを記入してください。該当するものが多い場合は主要なものを抜粋してください。）

①雑誌論文（著者名、論文標題、雑誌名、巻号、発行年、ページ）
②図書（著者名、出版社、書名、発行年、総ページ数）
③シンポジウム・公開講演会等の開催（会名、開催日、開催場所）
④その他（学会発表、研究報告書の印刷等）

③ 立教大学・理学部・数学科談話会　において発表　（開催日２０１５年７月８日 16:45 - 17:45, 開催場所：立教大学理学部）
早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー　において発表　（開催日２０１５年１０月２３日 16:30 - 18:00, 開催場所
早稲田大学早稲　田キャンパス１４号館 717B）