

立教大学学術推進特別重点資金（立教 S F R）
 大学院生研究
 2013年度研究成果報告書

研究科名	立教大学大学院	理学	研究科	数学	専攻
研究代表者	在籍研究科・専攻・学年		氏名		
	理学研究科数学専攻博士課程後期課程2年		柴田 和樹 印		
指導教員	所属・職名		氏名		
	理学部・教授		大杉 英史 印		
自然・人文・社会の別	自然 ・ 人文 ・ 社会		個人・共同の別	個人 ・ 共同 名	
研究課題名	中心対称配置とマトロイドに付随するトーリックイデアルの研究				
研究組織	在籍研究科・専攻・学年		氏名		
	理学研究科・数学専攻・2年		柴田 和樹		
研究期間	2013 年度				
研究経費	(支出金額) 439 千円 / (採択金額) 500 千円				

研究の概要 (200~300字で記入、図・グラフ等は使用しないこと。)

本研究は中心対称配置、マトロイドに付随するトーリックイデアルとグレブナー基底を構成することである。特にマトロイドに関しては、「マトロイドに付随するトーリックイデアルは2次生成である」という予想について考察する。既に一部のマトロイドについて、この予想が正しいことが証明されているが、一般の場合では予想が成り立つかどうか知られていない。そこで、既存の結果を用いながら、マトロイドに付随するトーリックイデアルの生成系、グレブナー基底を構成し、予想が成り立つかどうか調べていく。

キーワード (研究内容をよく表しているものを3項目以内で記入。)

[マトロイド] [トーリックイデアル] [グレブナー基底]

研究成果の概要 (図・グラフ等は使用しないこと。)

本研究は配置に付随するトーリックイデアルの生成系、グレブナー基底を構成し、様々な分野へ応用させることである。その中で特に、中心的対称配置、マトロイドに付随する配置に焦点を絞り、研究を行う。

1. 中心的対称配置のトーリックイデアル

中心的対称配置は、良いトーリック環のクラスを生み出すことが知られている。先行結果としてルート系の正根に付随する配置の中心的対称配置の結果が知られている。更に、中心的対称配置は実験計画など、様々な分野に応用することができることも知られている。本研究では一般の配置から作られる中心的対称配置のトーリックイデアルの生成系、グレブナー基底の構成を行う。中心的対称配置のトーリックイデアルの生成系、グレブナー基底を構成するにあたり、対象の配置そのものではなく、その部分行列を考え、そのトーリックイデアルの生成系、グレブナー基底を構成し、そこから元の中心的対称配置のトーリックイデアルの構成を行った。この操作においてトーリックイデアルの生成系、グレブナー基底を計算実験により調べた結果、部分行列のトーリックイデアルが1つの二項式で生成される場合において、中心的対称配置のトーリックイデアルの生成系、グレブナー基底を構成することができた。更に、求めたグレブナー基底がスクエアフリーの場合、中心的対称配置に対応するトーリック環のヒルベルト多項式を求めることにも成功した。

2. マトロイドに付随するトーリックイデアル

トーリックイデアルの未解決問題として、

予想: 「マトロイドに付随するトーリックイデアルは2次の二項式で生成される」

という予想(以下、マトロイド予想という)が存在する。この予想が肯定的に解決されているのは、「一様マトロイド」、「階数 3 以下のマトロイド」、「グラフィックマトロイド」など一部である。そこで、これらのマトロイド以外に対しても、マトロイド予想が成り立つのかどうか調べた。マトロイドには様々な操作があることが知られていて、例えば series and parallel connection、2-sum といった2つのマトロイドを組み合わせるそうさがある。この操作において、「2つのマトロイドを組み合わせたときに、トーリックイデアルの生成系やグレブナー基底に変化はあるのか?」という問題について考察した。既にトーリックイデアルが2次生成、2次のグレブナー基底をもつマトロイドにおいて、組み合わせたときのトーリックイデアルの変化について、計算実験を繰り返し行い調べた。その結果、以下の定理を証明することに成功した。

定理: 「与えられた2つのマトロイドにおいて、トーリックイデアルが2次生成、あるいは、2次のグレブナー基底をもつならば、series and parallel connection、2-sum で組み合わせたマトロイドのトーリックイデアルも2次生成、2次のグレブナー基底をもつ」

また、マトロイドは5つのクラスに分類することができることが知られている。上の定理を応用させることにより、5つのクラスの内1つのクラスにおいて、マトロイドに付随するトーリックイデアルが2次のグレブナー基底をもつことがわかり、新たなクラスでのマトロイド予想の肯定的な解決に貢献した。更に、上の定理により、マトロイド予想が成り立つかどうか調べるためには以下の予想が成り立つかどうか調べればよいこともわかった。

予想: 「すべての 3-connected なマトロイドに対し、トーリックイデアルは2次の二項式で生成される」

研究成果の概要 つづき

3. マトロイドに対応するトーリック環のヒルベルト多項式

トーリックイデアルに対して、任意の元のイニシャル単項式がスクエアフリーとなるグレブナー基底を構成することができれば、トーリック環のヒルベルト多項式を計算することができ、凸多面体のエルハート多項式を求めることができる。凸多面体のエルハート多項式について

予想: 「任意の整凸多面体のエルハート多項式の根の実部の絶対値は次元以下」

という予想がある。しかし、この予想が成り立たないような凸多面体が存在することが知られている。この予想について、「予想が成り立つような凸多面体は存在するか?」という問題を考えた。一様マトロイドに付随するトーリックイデアルのグレブナー基底はスクエアフリーであることが知られていて、一様マトロイドに対応するトーリック環のヒルベルト多項式(エルハート多項式)が求まっている。このヒルベルト多項式(エルハート多項式)の根を計算機により求め、調べていった結果、次の予想を提唱し、部分的に予想が正しいことを証明した。

予想: 「一様マトロイドに付随するトーリック環のヒルベルト多項式(エルハート多項式)の根の実部は負である」

研究発表 (研究によって得られた研究経過・成果を発表した①～④について、該当するものを記入してください。該当するものが多い場合は主要なものを抜粋してください。)

- ① 雑誌論文 (著者名、論文標題、雑誌名、巻号、発行年、ページ)
- ② 図書 (著者名、出版社、書名、発行年、総ページ数)
- ③ シンポジウム・公開講演会等の開催 (会名、開催日、開催場所)
- ④ その他 (学会発表、研究報告書の印刷等)

① 雑誌論文

・ H. Ohsugi, K. Shibata, Roots of the Ehrhart polynomial of hypersimplices, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 62 (2013), no. 2, 91-108.

②、③は該当なし

④ 学会発表

・ 柴田和樹, 「マトロイドの series-parallel におけるトーリックイデアルについて」, グレブナー若手集会, 信州大学 2013年7月15日.

・ 柴田和樹, 「マトロイドの series-parallel におけるトーリックイデアルについて」, 組合せ論と可換代数サマーセミナー, 下関市生涯学習プラザ, 2013年8月11日.

・ 柴田和樹, 「Toric ideals of series and parallel connection of matroids」, 第26回可換環論セミナー, 北海道教育大学, 2014年1月30日

・ 柴田和樹, 「マトロイドに付随するトーリック環のヒルベルト多項式について」, グレブナー若手集会, 九州大学, 2014年2月16日

・ 柴田和樹, 「Toric ideals of series and parallel connection of matroids」, 第19回代数学若手研究会, 信州大学, 2014年2月28日

投稿中の論文

・ K. Shibata, Toric ideals of series and parallel connection of matroids, arXiv:1312.3428.