

立教大学学術推進特別重点資金 (立教 S F R)

個人研究

2012年度研究成果報告書

研究代表者	所属・職名	氏名
	理学部物理学科・助教	黒木経秀 印
研究課題	行列模型を用いた弦理論の非摂動効果、非摂動的定義の探究及び時空構造の解明	
研究期間	2012年度	
研究経費	521千円	

研究の概要 (200~300字で記入、図・グラフは使用しないこと)

行列模型の階数無限大極限 (large-N 極限) によって超弦理論を非摂動的に定義し、それに基づき超弦理論のダイナミクスを明らかにする。具体的には、我々がこれまで研究してきた行列模型の相関関数がある種の large-N 極限で2次元の超弦理論のそれを厳密に再現することを示し、行列模型がこの超弦理論の非摂動的定式化を与える可能性を指摘する。さらにこの定式化に基づき、この理論では超対称性が自発的に破れることを示す。

一方、large-N 極限の新しい解析法として、非可換幾何学に基づく、新しい繰り込み群的アプローチを開発し、実際にそれを具体的な模型に適用すると、知られている結果を良い精度で再現することを示す。

キーワード (研究内容をよく表しているものを3項目以内で記入。)

[弦理論] [行列模型] [自発的対称性の破れ]

研究成果の概要 (図・グラフ等は使用しないこと。)

昨年度まで、SFR の支援を受け、杉野文彦氏(岡山光量子研) と共同で行列の階数無限大極限(large-N 極限)で超対称性が保たれる相、破れる相を持ち、それらの間で 3 次相転移を起こす行列模型の構成に成功した。本研究ではまずこの模型が弦理論の非摂動的定式化を与える可能性を追求した。従来このような簡単な行列模型が定義する弦理論は target space の超対称性を持たないものであったので、本研究では我々の行列模型が超対称性を持つ非臨界弦理論の非摂動的定式化となり得るかを研究した。

具体的には、超対称性が保たれている相を保ちながら、行列模型のパラメーターを臨界点に近づけ、これに連動して large-N 極限を取るいわゆる double scaling limit をどのように取るべきかをまず明確にする必要がある。これを決定するには、行列模型の相関関数の一般的表式が必要であるので、まずこれらを具体的に求めた。1 点関数に関しては、固有値密度を用いることにより、large-N 極限での表式を容易に求めることができる。その結果、偶数べきのオペレーターの期待値は臨界的な振る舞いを示さないが、奇数べきのものに関しては臨界点に近づくにつれてパラメーターの log の振る舞いをするを明らかにした。さらに、2 点関数の導出は技術的に困難であったが、行列に対するソース項を加えることで解決し、奇数べきの 2 点関数については、log のべきという新しい臨界的振る舞いを示すことが分かった。さらにこれを推し進め、奇数べきの 3 点関数についても最初の簡単な 2 つについてはやはり log のべきの振る舞いをするを確認した。これらの結果から、奇数べきの相関関数についての一般的表式を予測した。この際、奇数べきのオペレーターそのものの相関関数では規則的な臨界的振る舞いが見られないが、これに低次の偶数べきのオペレーターを混合させることにより、相関関数が一般的なスケールリングに従うことを見出した。すなわち、オペレーターの混合を明らかにした。この一般的表式から、double scaling limit の取り方を読み取り、我々の行列模型から、どのように超弦理論が定式化されるかを明確にした。

次に、このようにして定義された超弦理論がどのようなものかを明確にした。一般に行列模型と超弦理論の対応は自明ではなく、0 次元の行列模型から高次元の弦理論が定式化される可能性があり、その解明には対称性の比較、具体的な物理量の比較、物理的考察などを要する。そこでまず行列模型側の相関関数が log の振る舞いをするに着目した。超対称性を持たない非臨界弦理論の場合は、このような log の振る舞いは 2 次元の弦理論の特徴であったので、我々の行列模型が定義する非臨界超弦理論も 2 次元のものだと推測した。さらに、行列模型の持つ超対称性を超弦理論の target space の超対称性と同一視できる可能性を追求した。すると行列模型が定義している弦理論は 2 次元の target space の超対称性を持つ非臨界超弦理論と予想される。そのような理論の自然な候補として 2 次元の type IIA 超弦理論が知られているので、この理論の相関関数を求めた。具体的なオペレーターの対応も両者の超対称性の同一視によって自然に導かれる。特に、行列模型側は 0 次元、超弦理論は 2 次元で定義されているため、後者における運動量の概念が行列模型側では存在しないように見えるが、target space の超対称性の存在のために後者の運動量は離散的になることに着目し、行列のべきがそれに対応すると予測した。これらの考察から、行列模型の奇数べきのオペレーター、補助場、Grassmann odd のオペレーターはそれぞれ超弦理論側では R-R 場、NS-NS 場、NS-R ないし R-NS 場の運動量を持った状態に対応すると期待され、行列模型に対応した 2 点相関関数を超弦理論側でも導出した。

この 2 次元超弦理論の相関関数については、N=2 Liouville 理論として共形場理論を用いて計算できることが知られており、その一般的表式も知られていたが、我々の目的のように、外線が on-shell 状態の場合にその表式をそのまま適用すると一般には不定形になることが分かった。そこでこれをどのように正則化し、有限の値を得るかについても明確に規定し、超弦理論側でも有限の振幅を得ることに成功した。その結果、超弦理論は RR flux の背景を持つことが明らかになり、この背景の下で、超弦理論の 2 点相関関数は、我々が見出した double scaling limit の下で対応する行列模型の相関関数と完全に一致することを発見した。特に、異なる種類の 2 点相関関数が一般に一致し、さらに両者が log のべきという新しい臨界的振る舞いを示すという事実は、我々の行列模型が 2 次元 type IIA 超弦理論の非摂動的定式化を与えていることの強い証拠を与えている。

次に、この結果に基づき、我々の行列模型によって定義された超弦理論の超対称性が自発的に破れうる可能性について調べた。そのため、超対称性のオーダーパラメーターを Nicolai mapping を用いて求めることを試みた。まず Nicolai mapping の境界からくる寄与を単純に無視すると、オーダーパラメーターはゼロになり、超対称性が保たれていることを見出した。次に、境界の寄与を取り入れて、double scaling limit の下で厳密にオーダーパラメーターを評価した。

研究成果の概要 (つづき)

この際、直交多項式の方法を用いた。Nicolai mapping により、直交多項式は本質的に Hermite 多項式となるが、Nicolai mapping の境界の存在のため半無限区間の直交多項式となり、Hermite 多項式からずれる。このずれを取り入れ、弦理論の結合定数が小さい場合のオーダーパラメータの値を評価したところ、ゼロでない値を得た。即ち行列模型の超対称性は double scaling limit の下で自発的に破れることが証明された。さらにこのことは 2 次元の type IIA 超弦理論において target space の超対称性が自発的に破れることを示している。特に、計算されたオーダーパラメータの形を見ると、弦理論の非摂動効果そのものの形をしており、このことは摂動論の全次数でオーダーパラメータはゼロであり超対称性が保たれているが、非摂動的にはそれがゼロでない値を持ち超対称性が破れることを意味している。このように、超弦理論において、超対称性が自発的に破れる初の例を具体的に構成することに成功した。この解析をさらに進め、この非摂動効果は行列模型におけるインスタントンの寄与であることや、このインスタントン 1 個の周りのオーダーパラメータの厳密表式が Airy 関数で表されることなどを明らかにした。特に後者はインスタントン背景中の振幅について、genus や hole の寄与を全て足し上げた表式がシンプルに得られることを意味し、その物理的意味、意義など今後の発展が期待される成果である。また、このような行列模型のインスタントンの寄与は弦理論における D-brane に対応することが具体例で知られているので、この理論の場合も D-brane の凝縮によって超弦理論の超対称性が破れることを示唆しており、物理的にも非常に非自明かつ興味深い現象を解明していると期待される。

一方、一般の行列模型の large-N 極限の解析は、特に行列の個数が大きくなると困難になる。ところが臨界弦理論の非摂動的定式化としては行列を 10 個も持つようなものが提唱されており、large-N 極限の解析法の新しいアプローチが望まれている。その有望な候補として、large-N 繰り込み群という方法がある。これは $N \times N$ 行列模型に対し、1 行 1 列を積分した結果を $(N-1) \times (N-1)$ 行列模型として表すことにより、模型のパラメータの変化を読み取る操作を繰り込み群と見なし、その変換の固定点の解析によって large-N 極限における臨界指数など普遍的な物理量を読み取れるという手法であり、2 次元重力など簡単な模型については良い値を出すことが知られていた。しかしこの手法ではエネルギーの概念がないため、積分される 1 行 1 列が高エネルギーモードかどうか不明であり、通常の繰り込み群のような高エネルギー成分から積分するという描像がなく、従って繰り込み群の局所性なども不明であるという欠点があった。そこで本研究では、非可換幾何学のアイデアを用いてこの欠点を解決することを試みた。具体的には fuzzy sphere という非可換幾何を用いることにより、行列成分にエネルギー、より正確には角運動量の概念を付与できることに着目した。また、fuzzy sphere の構造から、 $N \times N$ 行列に対して、その行列成分は N に応じた最大角運動量を持つ。そこでこの最大角運動量を持つ行列成分を積分し、その結果を $(N-1) \times (N-1)$ 行列模型として書き直し、パラメータの変化を読み取るという新しい繰り込み群を提唱した。この新しい large-N 繰り込み群は従来のものと異なり、微分展開に対応する展開が可能など、変換がある意味で局所的であり、通常の場合の理論の繰り込み群と対応が直接的であるなどの利点がある。さらに具体的な行列模型に対しこの新しい large-N 繰り込み群を適用し、繰り込み群方程式を導いた。その固定点の解析も行い、各固定点の周りで、どのようにオペレーターのスケール次元を読み取るべきかの指標も明確に与えた。実際、このアプローチでも通常のガウス固定点が存在し、そこでの臨界指数はきちんと期待される値を再現することを確認した。それだけではなく非自明な固定点も見つかり、そこでの臨界指数が非自明な値を出すことを見出した。特に、同じ行列模型の作用から fuzzy sphere 上、noncommutative plane 上両方の場の理論におけるスケール次元を読み取ることができることが大きな利点である。また、他のアプローチとの整合性を確かめるため、我々の繰り込み群方程式から読み取れる臨界線を、既存の数値シミュレーションの結果と比較したところ、非常に良く一致していることが分かった。このことは、我々の新しい large-N 繰り込み群の手法の正しさを裏付けている。

このアプローチの応用として、新しい large-N 繰り込み群を適用すると、一般には行列に対し非局所的な変換を施した項が作用に現れることを発見した。この項が noncommutative anomaly として知られている項と関係していることは間違いないので、large-N 極限でどのように両者の関係が付くかという興味深い問題が提起される。また、あらかじめこのような項を加えた行列模型を構成することが自然であると思われ、今まで考えられてこなかった新しい行列模型の構成を示唆しており、行列模型自身に対する興味深い知見も与えている。

研究発表 (研究によって得られた研究経過・成果を発表した①～④について、該当するものを記入してください。該当するものが多い場合は主要なものを抜粋してください。)

- ①雑誌論文 (著者名、論文標題、雑誌名、巻号、発行年、ページ)
- ②図書 (著者名、出版社、書名、発行年、総ページ数)
- ③シンポジウム・公開講演会等の開催 (会名、開催日、開催場所)
- ④その他 (学会発表、研究報告書の印刷等)

①

- S. Kawamoto, T. Kuroki, and D. Tomino,
``Renormalization group approach to matrix models via noncommutative space,``
JHEP 1208 (2012) 168 [arXiv:1206.0574 [hep-th]].
- T. Kuroki, and F. Sugino,
``New critical behavior in a supersymmetric double-well matrix model,``
Nucl. Phys. B 867 (2013) 448 [arXiv:1208.3263 [hep-th]].
- S. Kawamoto, T. Kuroki, and D. Tomino, ,
``Large-N renormalization group on fuzzy sphere,``
Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. 21 (2013) 151.

②

③

- Bangkok workshop on gravity, gauge theory, matrices and strings, 2013年1月31日、Chulalongkorn University
- KEK 理論研究会 2013, 2013年3月20日、高エネルギー加速器研究機構

④ 学会発表:

- 日本物理学会 2012年秋季大会、2012年9月14日、京都産業大学
- 日本物理学会 第68回年次大会、2013年3月27日、広島大学

セミナー講演:

- String Advanced Lectures, 2012年10月31日、高エネルギー加速器研究機構
- Nagoya University String Seminars, 2012年11月2日、名古屋大学