※ ホームページ等で公表します。（様式１）

立教ＳＦＲ－個人－報告

立教大学学術推進特別重点資金（立教ＳＦＲ）
個人研究費
２００８年度研究成果報告書

	所属･職名	氏　名
研究代表者	理学部数学科・助教	星　明考　　　　印
研究課題	生成的多項式の共通部分体問題 －理論的枠組みの構築と計算代数による応用－	
研究期間	２００８　年度	
研究経費	５０００００円	

研究の概要（２００～３００字で記入、図・グラフは使用しないこと）

生成的多項式とは基礎体上の G-拡大全てをパラメータの特殊化によって実現する多項式である。よって生成的多項式を通じて G-拡大全体の構造を調べるためには、同型問題「生成的多項式の異なる変数の特殊化は、いつ同じ分解体を与えるか？」を研究する事が重要となる。さらには、その一般化である共通部分体問題「生成的多項式の異なる変数の特殊化による、それぞれの分解体の共通部分を求めよ」が考えられる。すでに三宅克哉氏(早稲田大学)との共同研究として得られた３次対称群に関する同型問題への解を一般化し、より高次の生成的多項式に対する共通部分体問題の研究を行う。

キーワード（研究内容をよく表しているものを３項目以内で記入。）

〔　生成的多項式　〕〔　同型問題　〕〔　共通部分体問題　〕

研究成果の概要（図･グラフ等は使用しないこと。）

生成的多項式とは基礎体上の G-拡大全てをパラメータの特殊化(数値の代入)によって実現する多項式である。よって生成的多項式を用いて G-拡大全体の構造を調べるためには「異なる変数の特殊化は、いつ同じ最小分解体を与えるか？」（＝同型問題)の解を与える事が非常に重要となる。さらに詳細に「異なる変数の特殊化によって、いつ一方が他方の部分体となるか？」(=部分体問題)、「異なる変数の特殊化による、それぞれの分解体の共通部分を決定せよ」(=共通部分体問題)という同型問題を一般化した 2 つの問題に対する研究を行った。

3 次巡回群に対する同型問題の解は Morton(1994 年)によって生成的多項式 $X^3+sX^2-(s+3)X+1$ を用いて与えられた。研究代表者は三宅克哉氏(早稲田大学)との共同研究において 3 次対称群に対する生成的多項式 X^3+sX+s の同型問題への解を与え、さらにはその後の研究で 3 次巡回群、3 次対称群どちらの場合においても共通部分体問題に対する解をも与えている。本研究はこれらの研究成果の高次化を目指すものである。

以下、得られた研究成果の概要について、今年度にプレプリントとして発表した論文ごとに解説を行うことにする。

1. (with Katsuya Miyake) On the field intersection problem of quartic generic polynomials via formal Tschirnhausen transformation. arXiv:0812.4807v1 [math.NT]

三宅克哉氏(早稲田大学)との共同研究として、4 次対称群に対する生成的多項式 X^4+sX^2+tX+t の共通部分体問題を考察し、multi-resolvent の分解タイプを用いることによってその解を与えた。これは、一般の 4 次多項式が生成的多項式 X^4+sX^2+tX+t に容易に変換出来ることから、一般の 4 次式に対する共通部分体問題への解を与えた事にも相当する。また、multi-resolvent を具体的に与える事によって、計算機を用いて共通部分体がどの程度大きいかを個々の場合に即座に判定する事が可能となった。特別な場合として同型問題の解を得る事ができるが、チルンハウス変換の幾何学的一般化というアイデアを用いることによって、さらに簡明な形で同型問題の解を与えた。これにより、無限体上において X^4+aX^2+bX+b と同じ分解体を与える X^4+cX^2+dX+d は無限に存在する事を示した。

またガロア群が退化している場合についても研究を行った。4 次二面体群に関する生成的多項式 X^4+sX^2+t 及び 4 次巡回群に関する生成的多項式 $X^4+sX^2+s^2/(u^2+4)$ に対して同型問題への解を具体的な形で与えた。

2. (with Katsuya Miyake) On the field intersection problem of solvable quintic generic polynomials. ArXiv:0804.4875v1 [math.NT]

三宅克哉氏(早稲田大学)との共同研究として、ガロア群が可解群である 5 次の生成的多項式に対する共通部分体問題への解を multi-resolvent の分解タイプを用いて与えた。この様な生成的多項式として、ガロア群が位数 20 のフロベニウス群、位数 10 の二面体群、位数 5 の巡回群の 3 つの場合がある。例えば、位数 10 の二面体群に対する生成的多項式は $X^5+(t-3)X^4+(s-t+3)X^3+(t^2-t-2s-1)X^2+sX+t$ によって与えられる。

※　この（様式２）に記入の、成果の公表を見合わせる必要がある場合は、その理由及び差し控え期間等を記入した調書（Ａ４縦型横書き１枚・自由様式）を添付すること。

研究成果の概要（つづき）

3. On correspondence between solutions of a parametric family of cubic Thue equations and isomorphic simplest cubic fields. arXiv:0810.3374v2 [math.NT]

3 次巡回群に対する生成的多項式 $X^3-sX^2-(s+3)X-1$ の同型問題への解の応用として、Thue 方程式族 $X^3-sX^2Y-(s+3)XY^2-Y^3 = k$ の整数解に対する考察を行った。その結果、有理数 m に対する $X^3-mX^2-(m+3)X-1$ の Q 上の最小分解体 L(m)の同型類と(m^2+3m+9)の約数 k 達に対する Thue 方程式族 $X^3-sX^2Y-(s+3)XY^2-Y^3 = k$ の整数解に対する対応関係を見出した。さらには、岡崎龍太郎氏(同志社大)によって得られた L(m)の同型類の決定をこの対応に適用する事によって、上述の Thue 方程式族の整数解を全て決定した。

4. (with Katsuya Miyake) A note on the field isomorphism problem of X^3+sX+s and related cubic Thue equations. arXiv:0901.4831v2 [math.NT]

三宅克哉氏との共同研究として、同氏と既に与えていた 3 次対称群をガロア群とする生成的多項式 X^3+sX+s に対する同型問題の解のある種の Thue 方程式族への応用を与えた。有理数 m に対する X^3+mX+m の Q 上の最小分解体 L(m) の同型類と λ^2 が $m^3(4m+27)^5$ の約数である場合の Thue 方程式族 $X^3-2mX^2Y-9mXY^2-m(2m+27)Y^3 = \lambda$ の原始的整数解との対応関係を与えると共に、その具体例として $-10\leqq m\leqq 5$ なる整数 m に対して、L(m) と L(n)が同型となる整数 n を全て決定した。その結果、この様な整数 n は 17 個しかない事が判明した。

※　この（様式２）に記入の、成果の公表を見合わせる必要がある場合は、その理由及び差し控え期間等を記入した調書（Ａ４縦型横書き１枚・自由様式）を添付すること。