立教大学学術推進特別重点資金（立教ＳＦＲ）
個人研究費
２００８年度研究成果報告書

	所属･職名	氏　名
研究代表者	理学部・教授	矢彦沢　茂明　　印
研究課題	重力波を背景場とした超弦理論の物理状態と分配関数	
研究期間	２００８年度	
研究経費	５０万円	

研究の概要（２００～３００字で記入、図・グラフは使用しないこと）

全ての基本物質と四つの力をまとめあげる第一候補は超弦理論である。重力波を背景場とし、超対称性を持った超弦理論を厳密に共変的量子化し、そこから時空次元数やスペクトル等の物理量を求め上げることなどが重要である。さらに、背景場上の超弦の場の理論を開発することが大切である。本研究では、低エネルギーの超弦の場の作用と２次摂動展開した通常の重力場の作用が重力波の一種である NS-NS pp-Wave 上で厳密に一致することを証明した。また、背景場中の超弦の一般解による、第一量子化の方法をもとにして、超弦の共変的な場の理論の構成ができることを示した。

キーワード（研究内容をよく表しているものを３項目以内で記入。）

〔超弦理論〕　〔背景場〕　〔超弦の場の理論〕

研究成果の概要（図･グラフ等は使用しないこと。）

背景場上の超弦理論を理解するために、最も深く調べるべきことは「背景場上の超弦の場の理論」である。特に、共変的に理解することが重要である。時空が平坦な場合の弦の場の理論は 30 数年間でよく調べられているが、曲がった時空の背景場上の共変的な仕組みは調べられていない。そこで、ここでは、NS-NS pp-Wave を背景場として、超弦の場の理論が正しく成立しているかどうかを厳密に調べた。NS-NS pp-Wave とは

$$\boxed{\begin{aligned} &ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\mu^2 z^* z dx^+ dx^+ - 2dx^+ dx^- + dz^* dz + dx^k dx^k \\ &B_{+z} = -\frac{i}{2}\mu z^*,\ B_{+z^*} = +\frac{i}{2}\mu z \end{aligned}}$$

である。$B_{\mu\nu}$ は反対称テンソル場の背景場である。

以下、超弦の場の理論の重力場、反対称テンソル場、ディラトン場の部分の作用を計算し、それが、超重力場の作用と一致するかどうかを確かめる。物理状態は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} |\Phi(x)\rangle = c_0^- \Big[&\{h_{\mu\nu}(x) + b_{\mu\nu}(x)\}\tilde{\psi}^\mu_{-1/2}\psi^\nu_{-1/2} \\ &+ \phi(x)\tilde{\beta}_{-1/2}\gamma_{-1/2} + s(x)\tilde{\gamma}_{-1/2}\beta_{-1/2} \\ &+ B_\mu(x) c_0^+ \tilde{\beta}_{-1/2}\psi^\mu_{-1/2} + E_\mu(x) c_0^+ \tilde{\psi}^\mu_{-1/2}\beta_{-1/2}\Big] |\downarrow\downarrow\rangle \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

ここで、$h_{\mu\nu}$ は重力場、$b_{\mu\nu}$ は反対称テンソル場、ϕ と s はディラトン場、B_μ と E_μ は補助場である。（s はゲージ条件から消える。）上記の物理状態を用いて作用の計算をする。ただし、ここでは相互作用は省いて計算する。出発点の作用は以下の形である。

$$S = -\int d^{10}x \langle \Phi(x)| Q_B b_0^- |\Phi(x)\rangle$$

Q_B は BRST チャージである。以下、重力場のみを表示することにする。Q_B をヴィラソロ演算子と超ヴィラソロ演算子を用いて表現すると次のようになる。

$$\begin{aligned} S = -\int \Big[&\langle \psi^\alpha_{1/2}\tilde{\psi}^\beta_{1/2} h_{\alpha\beta} (\tilde{L}^M_0 + L^M_0 - 1 + 2\hat{\mu}) h_{\mu\nu} \tilde{\psi}^\mu_{-1/2}\psi^\nu_{-1/2}\rangle \\ &+ \langle \psi^\alpha_{1/2}\tilde{\psi}^\beta_{1/2} h_{\alpha\beta} \tilde{G}^M_{-1/2} B_\mu \psi^\mu_{-1/2}\rangle + \langle \psi^\alpha_{1/2}\tilde{\psi}^\beta_{1/2} h_{\alpha\beta} G^M_{-1/2} E_\mu \tilde{\psi}^\mu_{-1/2}\rangle \\ &- \langle \psi^\alpha_{1/2} B_\alpha \tilde{G}^M_{1/2} h_{\mu\nu} \tilde{\psi}^\mu_{-1/2}\psi^\nu_{-1/2}\rangle - \langle \tilde{\psi}^\alpha_{1/2} E_\alpha G^M_{1/2} h_{\mu\nu} \tilde{\psi}^\mu_{-1/2}\psi^\nu_{-1/2}\rangle \\ &+ \langle \tilde{\psi}^\alpha_{1/2} B_\alpha B_\mu \tilde{\psi}^\mu_{-1/2}\rangle + \langle \psi^\alpha_{1/2} E_\alpha E_\mu \psi^\mu_{-1/2}\rangle \Big] \end{aligned}$$

一例として、ヴィラソロ演算子の部分の計算結果を以下に表しておく。

$$\begin{aligned} &-\int \langle \psi^\alpha_{1/2}\psi^\beta_{1/2} h_{\alpha\beta} [\tilde{L}^M_0 + L^M_0] h_{\mu\nu}\psi^\mu_{-1/2}\psi^\nu_{-1/2}\rangle \\ &= \frac{\alpha'}{2}\int [g^{\rho\sigma} h^{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma h_{\mu\nu} + 8\mu^2 h^{+\mu}(z\partial_- h_{\mu z} + z^*\partial_- h_{\mu z*}) \\ &\quad - 4\mu^2 h^{+\mu}(z\partial_z h_{-\mu} + z^*\partial_{z*} h_{-\mu}) - 4\mu^2(h^{+z}h_{-z} + h^{+z*}h_{-z*}) \\ &\quad - 16\mu^2 h^{++} h_{zz*} + 2\mu^4 z^* z h^{++} h_{--}] - \int h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \end{aligned}$$

※　この（様式２）に記入の、成果の公表を見合わせる必要がある場合は、その理由及び差し控え期間等を記入した調書（Ａ４縦型横書き１枚・自由様式）を添付すること。

研究成果の概要（つづき）

さらに、アノマリー項の計算結果は

$$
\begin{aligned}
&-\int\langle\psi^{\alpha}_{1/2}\psi^{\beta}_{1/2}h_{\alpha\beta}[-1+2\hat{\mu}]h_{\mu\nu}\psi^{\mu}_{-1/2}\psi^{\nu}_{-1/2}\rangle\\
&=\int[h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}-i\alpha'\mu\partial_-(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu})]
\end{aligned}
$$

となる。この第一項は上のヴィラソロ演算子関連の項とキャンセルする。また、最後の項は全微分なので消える。超ヴィラソロの部分の計算は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\langle\psi^{\alpha}_{1/2}B_\alpha\tilde{G}^{\mathrm{M}}_{1/2}h_{\mu\nu}\tilde{\psi}^{\mu}_{-1/2}\psi^{\nu}_{-1/2}\rangle\\
&=-i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}B_\mu\left\{g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\partial_\nu h_{\alpha\beta}+\mu^2h^{++}(z\delta^\mu_z+z^*\delta^\mu_{z*})\right\}\equiv B_\mu A^\mu
\end{aligned}
$$

補助場の作用を変分した方程式を再び代入して消去すると超ヴィラソロ部分の作用は次のようにまとまる。

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}&=-\int 2A_\mu A^\mu\\
&=\frac{\alpha'}{2}\int[-2h^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma}-4\mu^2h^{+\mu}(z\partial_-h_{\mu z}+z^*\partial_-h_{\mu z*})\\
&\quad+4\mu^2h^{++}g^{\rho\sigma}(z\partial_\rho h_{\sigma z}+z^*\partial_\rho h_{\sigma z*})+2\mu^2(zh^{+z*}+z^*h^{+z})g^{\rho\sigma}\partial_\rho h_{-\sigma}\\
&\quad+2\mu^4z^*zh^{++}h_{--}]
\end{aligned}
$$

以上の計算から、この超弦の場の作用の結果は次のようになった。

$$
\begin{aligned}
S=\frac{\alpha'}{2}\int[&g^{\rho\sigma}h^{\mu\nu}(\partial_\rho\partial_\sigma h_{\mu\nu}-2\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma})\\
&+4\mu^2h^{+\mu}(z\partial_-h_{\mu z}+z^*\partial_-h_{\mu z*})-4\mu^2h^{+\mu}(z\partial_zh_{-\mu}+z^*\partial_{z*}h_{-\mu})\\
&+4\mu^2h^{++}g^{\rho\sigma}(z\partial_\mu h_{z\nu}+z^*\partial_\mu h_{z*\nu})+2\mu^2(zh^{+z*}+z^*h^{+z})g^{\mu\nu}\partial_\mu h_{-\nu}\\
&-4\mu^2(h^{+z}h_{-z}+h^{+z*}h_{-z*})-16\mu^2h^{++}h_{zz*}+4\mu^4z^*zh^{++}h_{--}]
\end{aligned}
$$

一方、フラックスのある pp-wave 上の超重力作用の２次摂動展開は次の形である。（ただし、h となる項はここでは表示しない。h の項はディラトンのと関連から導かれる。）

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2\kappa^2}\int[h^{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\rho h_{\mu\nu}-2g^{\rho\sigma}h^{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\nu h_{\mu\sigma}-h^{\alpha\mu}h^{\beta\nu}H_{\alpha\beta\gamma}H^{\gamma}_{\mu\nu}]\\
&=\frac{1}{2\kappa^2}\int[g^{\rho\sigma}h^{\mu\nu}(\partial_\rho\partial_\sigma h_{\mu\nu}-2\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma})\\
&\quad+4\mu^2h^{+\mu}(z\partial_-h_{\mu z}+z^*\partial_-h_{\mu z*})-4\mu^2h^{+\mu}(z\partial_zh_{-\mu}+z^*\partial_{z*}h_{-\mu})\\
&\quad+4\mu^2h^{++}g^{\rho\sigma}(z\partial_\mu h_{z\nu}+z^*\partial_\mu h_{z*\nu})+2\mu^2(zh^{+z*}+z^*h^{+z})g^{\mu\nu}\partial_\mu h_{-\nu}\\
&\quad-4\mu^2(h^{+z}h_{-z}+h^{+z*}h_{-z*})-16\mu^2h^{++}h_{zz*}+4\mu^4z^*zh^{++}h_{--}]
\end{aligned}
$$

以上から、この背景場上でも、超弦の場の作用と超重力作用は少なくとも２次摂動展開では完全に一致していることを示し上げることができた。

結果としては以下のようにまとめられる。

(1)“低エネルギー”の超弦の場の作用と２次摂動展開した超重力場の作用は、NS-NS pp-Wave 上で厳密に一致する。
(2) 背景場中の超弦の一般解による、第一量子化の方法をもとにして、超弦の共変的な場の理論の構成ができる。

以上の研究成果はこれから雑誌論文に投稿する。（日本物理学会では３月に発表した。）